

УДК 378.1  
DOI 10.26118/6700.2026.61.36.034

**Ганичева Антонина Валериановна**  
Тверская государственная сельскохозяйственная академия  
**Ганичев Алексей Валерианович**  
Тверской государственный технический университет

### **Математическая модель организации поступления заданий при тестировании**

**Аннотация.** Технология тестирования является важнейшей в учебном процессе, медицине, диагностике качества выпускаемой продукции и во многих других областях. Эта технология особенно актуальна в связи с внедрением цифровых технологий и систем искусственного интеллекта. В данной статье разработана новая математическая модель организации процедуры тестирования учащихся. Для анализа методов диспетчеризации процедуры тестирования используется аппарат теории случайных процессов. Показан метод определения важного показателя организации процедуры тестирования - скорости изменения числа заданий, поступивших учащемуся за заданное время. Рассчитаны характеристики данного показателя, как случайного процесса: математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция. Показано, что скорость изменения числа заданий для их простейшего потока является стационарным белым шумом (количество заданий в разные моменты времени не коррелировано). В этом случае обеспечивается стационарность процесса тестирования, т.е. статистические характеристики случайного процесса не меняются с течением времени. Разработанная в статье модель может применяться не только в учебном процессе, но и для диагностики качества продукции, в медицине, при тестировании программного обеспечения и других областях.

**Ключевые слова:** учебный процесс, случайная функция, поток тестовых заданий, проверка знаний, диагностика.

**Ganicheva Antonina Valerianovna**  
Tver State Agricultural Academy  
**Ganichev Aleksey Valerianovitch**  
Tver State Technical University

### **A mathematical model for organizing the receipt of assignments during testing**

**Abstract.** Testing technology is the most important in the educational process, medicine, diagnostics of the quality of products and in many other areas. This technology is especially relevant in connection with the introduction of digital technologies and artificial intelligence systems. In this article, a new mathematical model of the organization of the student testing procedure has been developed. The apparatus of the theory of random processes is used to analyze the methods of dispatching the testing procedure. A method is shown for determining an important indicator of the organization of the testing procedure, the rate of change in the number of assignments received by a student in a given time. The characteristics of this indicator as a random process are calculated: mathematical expectation, variance and correlation function. It is shown that the rate of change in the number of tasks for their simplest flow is a stationary white noise (the number of tasks at different time points is not correlated). In this case, the testing process is stationary, i.e. the statistical characteristics of the random process do not change over time. The model developed in the article can be used not only in the educational process, but also for diagnosing product quality, in medicine, when testing software and other areas.

**Keywords:** learning process, random function, flow of test tasks, knowledge verification, diagnostics

### **Введение**

Проблема качества тестирований учащихся является одной из основных в учебном процессе [1].

Математическая модель организации поступления заданий при тестировании часто строится на принципах теории массового обслуживания [2]. В этих работах дается обоснование продолжительности тестирования в зависимости от сложности тестовых заданий. В ходе исследований определяется оптимальное количество тестируемых, осуществляется минимизация времени ожидания и вероятности отказа. Показано, что превышение или уменьшение оптимального времени тестирования снижает качественные показатели теста. Вопрос формирования оптимального комплекта структур тестов рассмотрен в статье [3], системы проверки знаний на основе дискретных моделей оптимизации разработаны в [4].

Целью данной статьи является разработка метода определения характеристик скорости изменения числа заданий, поступивших учащемуся за заданное время.

### **Тестовые технологии**

Развитие цифровых технологий привело к их внедрению в образовательный процесс. Одной из таких технологий является технология тестирования [5]. Формирование процесса (метода) тестирования как технологии произошло с заменой бумажных носителей вопросов и ответов на электронные. Но самое главное – изменился сам метод (последовательность операций) получения результатов тестирования. Вместо рутинной ручной проверки ответов на тесты применяется их автоматизированная (компьютерная) проверка. Эта проверка затрагивает сейчас не только общий результат проверки знаний, но и анализ усвоения отдельных компетенций, разделов, тем и отдельных вопросов учебной дисциплины, а также применяется для детальной диагностики проблем, возникающих при изучении учебного материала.

Тестовые технологии применяются не только в учебном процессе на всех его уровнях (начальное, среднее профессиональное, высшее, повышение квалификации и переподготовка), но и для диагностики качества выпускаемой продукции, в медицине, при оценке строительных конструкций, для выборочного контроля качества семян и почв, при проверке знания правил дорожного движения, при тестировании программного обеспечения [6], осуществлении проверки исправности вычислительной и другой техники, систем безопасности, сайтов, социальных сетей и т.д.

Одной из важных проблем является организация процедуры тестирования. Участниками процедуры тестирования являются: разработчик, тестирующий (QA-инженер), тестируемый (испытуемый) объект (субъект).

Тестовые задания могут выдаваться все одновременно или последовательно (одно за другим). Может быть разрешен или нет произвольный выбор заданий для ответов, а также допускается пропуск задания или последующий возврат к нему. Тестируемыми в образовательной сфере могут быть как отдельные студенты, так и учебные группы или факультеты. Скорость поступления заданий может быть постоянной, переменной или изменяться по заданному закону. Процесс организации процедуры тестирования назовем диспетчеризацией. При диспетчеризации могут использоваться методы теории вероятностей, прежде всего теории массового обслуживания.

### **Расчет характеристик скорости изменения числа заданий**

Рассмотрим проблему диспетчеризации при тестировании на следующем примере из учебного процесса.

Учащемуся в период тестирования поступают задания. Примем, что этот поток заданий является простейшим (т.е. выполняются условия стационарности, ординарности, отсутствия последствия) [7].

Плотность потока обозначим как  $\lambda$ . Пусть случайная функция  $X(t)$  – число заданий, поступивших учащемуся за время  $t$ . Покажем метод определения скорости изменения  $X(t)$  -  $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ .

Одна из реализаций случайной функции  $X(t)$  показана на рис. 1.

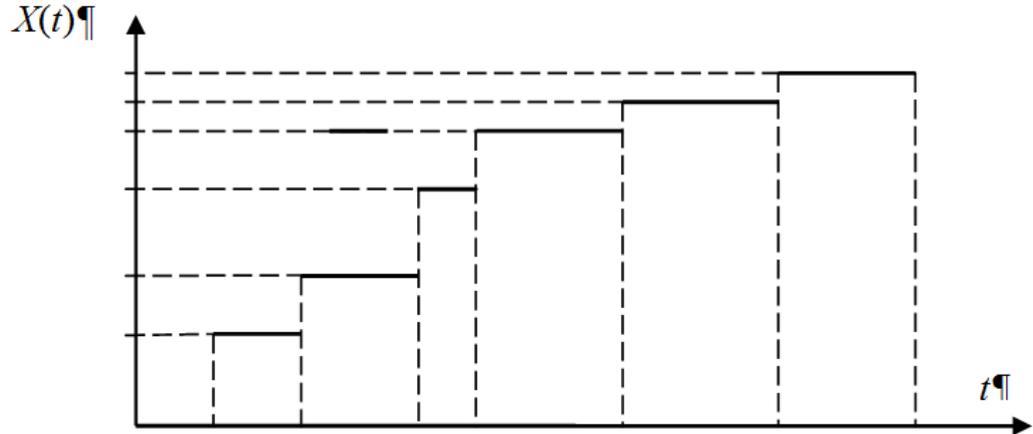


Рис. 1 – Реализация случайной функции  $X(t)$

Из рис. 1 видно, что  $X(t)$  является разрывной функцией, поэтому в обычном смысле не дифференцируема. Поэтому для записи характеристик ее производной следует пользоваться обобщенной дельта-функцией. Преобразование  $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ , устанавливающее связь случайных функций  $Y(t)$  с  $X(t)$ , является линейным и однородным.

Закон распределения реализации  $X(t)$  – закон Пуассона с параметром  $a = \lambda t$ . Вероятность того, что случайная величина  $X(t)$  в данной реализации примет значение  $k$ , будет равна:

$$P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а математическое ожидание и дисперсия определяются по формулам:

$$m_x(t) = D_x(t) = a.$$

В [8] показано, что корреляционная функция определяется по формуле:

$$K_x(t, t') = \lambda \cdot \min\{t, t'\},$$

где  $t, t'$  - рассматриваемые моменты времени.

Тогда  $m_y(t) = \frac{d}{dt} m_x(t) = \frac{d}{dt} \lambda t = \lambda$ ;  $D_y(t) = \frac{d}{dt} D_x(t) = \frac{d}{dt} \lambda t = \lambda$ ;

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t'} [\lambda t 1(t-t') + \lambda t' 1(t-t')] \right) = \lambda \delta(t-t'),$$

где  $1(t-t')$  - единичная функция;  $\delta(t-t')$  - дельта-функция [1];

$$1(t-t') = \begin{cases} 1 & \text{при } t > t'; \\ 1/2 & \text{при } t = t'; \\ 0 & \text{при } t < t'; \end{cases} \quad \delta(t-t') = \frac{d}{d(t-t')} 1(t-t').$$

Получили, что корреляционная функция  $K_y(t, t')$  зависит от плотности потока тестовых заданий  $\lambda$  и пропорциональна значению дельта-функции.

Следовательно, случайная функция  $Y(t)$  представляет собой стационарный белый шум с интенсивностью  $G = \lambda$  и средним значением  $m_y = \lambda$ . Белый шум — это случайный процесс, значения которого в различные моменты времени не коррелированы.

Спектральная плотность белого шума будет [1]:  $S_y^* = \frac{\lambda}{2\pi}$ , т.е. одинакова на всех частотах. Таким образом, простейший поток заданий обеспечивает стационарность процесса тестирования. Белый шум в непрерывном времени является эргодическим случайным процессом. В этом случае о статистических характеристиках процесса можно судить по одной его реализации. Данное обстоятельство особенно важно при экспериментальном исследовании проблем тестирования.

#### Заключение

В данной статье разработан новый метод расчета скорости изменения числа заданий, поступивших учащемуся за заданное время. Для определения характеристик данного показателя использован аппарат теории случайных процессов. Показано, что при простейшем потоке обеспечивается стационарность процесса тестирования, т.е. статистические характеристики случайного процесса не меняются с течением времени.

Дальнейшим развитием методов диспетчеризации при тестировании является рассмотрение потока заданий с очередью и отказами, а также другого вида потока заданий (не простейшего, а например, Эрланга). Важным вопросом является также рассмотрение диспетчеризации тестирования групп студентов (однородных и разнородных с точки зрения уровня знаний).

Еще одним важным направлением решения проблем тестирования является адаптивное тестирование на базе нейронных сетей.

#### Список источников

1. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Математическая модель оценки качества тестирования // Информатизация образования и науки, 2020. - № 4 (48). – С. 114-123.
2. Печеный Е.А., Нуриев Н.К., Али А.А. Математическая модель эффективного администрирования многоканальной СМО в системе контроля качества учебного процесса // Фундаментальные исследования, 2016. № 10-3. – С. 532-536.
3. Хузиахметова А.Р., Нуриев Н.К., Хузиахметова Р.Н. Оценка продолжительности тестирования в зависимости от сложности теста // Современные проблемы науки и образования, 2019. - № 3. - С. 28.
4. Zaozerskaya L.A., Plankova V.A. Development of knowledge testing systems based on discrete optimization models // Journal of Physics: Conference Series. XIII International Scientific and Technical Conference «Applied Mechanics and Systems Dynamics», 2020. – С. 012183.
5. Ганичева А.В. Тестовые технологии в обучении: монография / А.В. Ганичева и [др.]. – Тверь Издательство Тверской ГСХА, 2011. – 130 с.
6. Ярмонов А.С., Верещагина Е.А., Фролов А.В. Тестирование программ и математическая модель поиска ошибок в программном комплексе // Промышленные АСУ и контроллеры, 2024. - № 2. - С. 42-44.
7. Ганичева А.В. Теория вероятностей. – СПб: Лань, 2017. – 144 с.
8. Вентцель Е.С., Л.А. Овчаров. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студ. вузов. - М.: Издательский центр «Академия», 2003. - 448 с.
9. Головин Д.А. Математические модели и алгоритмы адаптивного тестирования на базе нейронных сетей // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки, 2024. - № 10. С. – 104-108.

### **Сведения об авторах**

**Ганичева Антонина Валериановна**, канд. физ. мат. наук, доцент, профессор кафедры физико-математических дисциплин и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тверская государственная сельскохозяйственная академия», Тверь Россия.

**Ганичев Алексей Валерианович**, старший преподаватель кафедры информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», Тверь Россия.

### **Information about the authors**

**Ganicheva Antonina Valerianovna**, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Physics and Mathematics and Information Technology, Tver State Agricultural Academy, Tver, Russia.

**Ganichev Aleksey Valerianovitch**, Senior Lecturer of the Department of Informatics and Applied Mathematics, Tver State Technical University, Tver, Russia.