УДК 378.14
DOI 10.34755/IROK.2026.94.66.045

Ганичева Антонина Валериановна
Тверская государственная сельскохозяйственная академия
Ганичев Алексей Валерианович
Тверской государственный технический университет

Моделирование успеваемости учебной группы

Аннотация. Учебный процесс подвержен воздействию множества случайных факторов, поэтому для его моделирования следует использовать аппарат теории случайных процессов. В статье разработана математическая модель оценки успеваемости учебной группы на основе случайных функций. Для моделирования потока четырех видов оценок студентов используется многомерный пуассоновский поток оценок. Разработан метод расчета основных характеристик случайного процесса. Для пояснения разработанного метода рассмотрен конкретный числовой пример, основанный на имитационном моделировании в MS Excel процесса получения оценок учебной группой. Для решения задачи прогнозирования предложено строить линии трендов для каждого вида оценок. Результаты моделирования показали очень высокое качество построенных линейных регрессионных моделей (коэффициент детерминации близок к единице). Рассчитаны характеристики случайного процесса для приведенного примера**.**

Разработанный метод может быть использован не только для традиционной пятибалльной шкалы оценивания, но и для других шкал.

Ключевые слова: оценки, случайный процесс, интенсивность потока, многомерное распределение Пуассона, событие, реализация, вектор

Ganicheva Antonina Valerianovna
Tver State Agricultural Academy
Ganichev Alexey Valerianovich
Tver State Technical University

Modeling the sustainable development of the educational process of a higher educational institution

Abstract. The educational process is subject to the influence of numerous random factors, so its modeling requires the use of the theory of random processes. This article develops a mathematical model for assessing the academic performance of a study group based on random functions. A multivariate Poisson flow of grades is used to model the flow of four types of student grades. A method for calculating the main characteristics of the random process is developed. To illustrate the developed method, a specific numerical example is considered, based on a simulation modeling in MS Excel of the process of receiving grades by a study group. To solve the forecasting problem, it is proposed to construct trend lines for each type of grade. The modeling results demonstrated very high quality of the constructed linear regression models (the determination coefficient is close to one). The characteristics of the random process for this example are calculated.

The developed method can be used not only for the traditional five-point grading scale but also for other scales.

Keywords: estimates, random process, flow intensity, multidimensional Poisson distribution, event, realization, vector

Введение

В настоящее время много научных исследований посвящено проблеме оценивания результатов образовательного процесса. Один из распространенных методов заключается в использование Марковских цепей [6]. Качество учебного процесса в образовательной организации характеризуется успеваемостью учащихся. На успеваемость учащихся воздействует множество случайных факторов. Поэтому для математического описания и анализа рассматриваемого процесса следует использовать методы теории случайных процессов. Один из распространенных методов заключается в использовании Марковских цепей [5]. Теории случайных процессов применяется для решения рассматриваемой проблемы недостаточно. Только в статье [6] для моделирования траектории успеваемости показано применение данного математического аппарата.

Целью настоящей статьи является моделирование процесса получения оценок студентами учебной группы с помощью применения многомерного пуассоновского потока оценок.

Материалы и методы

Моделирование успеваемости учебной группы с помощью случайных процессов - это подход, который позволяет анализировать динамику изменения успеваемости, прогнозировать её и выявлять факторы, влияющие на результаты обучения.

Рассмотрим учебную группу, изучающую математику в ВУЗе. Студенты получают 4 вида текущих оценок: «отлично» (5), «хорошо» (4), «удовлетворительно» (3) и «неудовлетворительно» (2). Процесс формирования этих оценок является случайным. Обозначим плотности (интенсивности) потоков этих видов оценок, соответственно, как $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Для моделирования процесса формирования оценок учебной группы можно использовать многомерную случайную величину (случайный вектор) $X(t) = \left(X_1(t),\ X_2(t),\ X_3(t),\ X_4(t)\right)$. При этом: $X_1(t)$ - количество пятерок, $X_2(t)$ - четверок, $X_3(t)$ - троек, $X_4(t)$ - двоек.

Закон распределения сечения случайного вектора $X(t)$ есть многомерный закон распределения Пуассона. Вероятность того, что случайный вектор $X(t)$ примет фиксированное значение $x(t) = \left(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t)\right)$ выражается формулой [3, 4]:

$$P_a\left(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ X_3 = x_3,\ X_4 = x_4\right) = e^{-\sum\limits_{i=1}^{4} a_i} \prod_{i-1}^{4} \frac{\left(a_i\right)^{x_i}}{x_i!}, \tag{1}$$

где $a = \left(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\right)$ - параметр многомерного распределения Пуассона; $a_i = \lambda_i t = M[x_i]$; λ_i - действительные положительные числа (плотность потока, связанного с i-ой координатой); x_i - целые неотрицательные числа, $i = \overline{1,4}$, t – рассматриваемый промежуток времени.

Математические ожидания и дисперсии для распределения (1) находятся аналогично одномерному распределению Пуассона по следующим формулам:

$$M_{a_i}\left(X\right) = D_{a_i}\left(X\right) = a_i = \lambda_i t\,;\ i = \overline{1,4}. \tag{2}$$

Средние квадратическое отклонение равно:

$$\sigma_{a_i}\left(X\right) = \sqrt{D_{a_i}\left(X\right)} = \sqrt{a_i} = \sqrt{\lambda_i t}\,;\ i = \overline{1,4}. \tag{3}$$

Корреляционные функции определяются выражением [2]:

$$K_{a_i}\left(t, t'\right) = \lambda_i \min\left\{t, t'\right\};\ i = \overline{1,4}, \tag{4}$$

где $\min\left\{t, t'\right\}$ - минимальная из величин t, t'.

Нормированные корреляционные функции определяется по следующей формуле:

$$r_{a_i}\left(t,t'\right)=\frac{K_{a_i}\left(t,t'\right)}{\sqrt{D_{a_i}\left(t\right)D_{a_i}\left(t'\right)}};\ i=\overline{1,4}. \qquad (5)$$

Результаты и их обсуждение

Для пояснения разработанного метода рассмотрим следующую учебную ситуацию. В учебной группе 20 студентов. Дисциплина – математика – изучается в первом семестре (16 недель). Рассмотрим случай получения оценок каждым студентом один раз в неделю. Примем потоки оценок простейшими с плотностями $\lambda_1=6,\ \lambda_2=8,\ \lambda_3=4,\ \lambda_4=2$. Это означает, что в среднем за неделю поступает 4 события – получение пятерки, 8 – четверки, 6 – тройки, 2 - двойки. Рассмотрим накопление оценок.

Определим характеристики координат случайного вектора $X_1(t),\ X_2(t),\ X_3(t),\ X_4(t)$ по формулам (2)-(5) для *t* = 1 (неделя):

$$M_{a_1}\left(X\right)=D_{a_1}\left(X\right)=\lambda_1 t=6;\ M_{a_2}\left(X\right)=D_{a_2}\left(X\right)=\lambda_2 t=8;$$
$$M_{a_3}\left(X\right)=D_{a_3}\left(X\right)=\lambda_3 t=4;\ M_{a_4}\left(X\right)=D_{a_4}\left(X\right)=\lambda_4 t=2.$$

Средние квадратические отклонения равны: $\sigma_{a_1}\left(X\right)=2,45;$ $\sigma_{a_2}\left(X\right)=2,83;\sigma_{a_3}\left(X\right)=2;\sigma_{a_4}\left(X\right)=1,41.$

Так как $\min\left\{t,t'\right\}=1$, то корреляционные функции будут: $K_{a_1}\left(t,t'\right)=6;$ $K_{a_2}\left(t,t'\right)=8;\ K_{a_3}\left(t,t'\right)=4;\ K_{a_4}\left(t,t'\right)=2.$

Не нормированная корреляционная функция случайного процесса может принимать значения больше 1. Это происходит, когда дисперсия процесса (или его интенсивность) велика.

Нормированные корреляционные функции равны:

$$r_{a_1}\left(t,t'\right)=r_{a_2}\left(t,t'\right)=r_{a_3}\left(t,t'\right)=r_{a_4}\left(t,t'\right)=1.$$

Таким образом, между событиями получения положительных оценок в группе существует функциональная зависимость, что объясняется одинаковой интенсивностью потоков оценок обучаемых.

Выполним моделирование изучаемого процесса в MS Excel, используем надстройку «Анализ данных» (Генерация случайных чисел. Распределение: Пуассоновское. Параметр: Лямбда).

Результаты имитационного моделирования по каждой неделе для четырех видов оценок приведены в табл. 1.

Табл. 1 – Моделирование получения оценок в семестре

№ недели / λ_i																
										0	1	2	3	4	5	6
6																
8							0			0				4		1
4																
2																

Результаты моделирования исследуемого процесса в MS Excel приведены на рис. 1. Приводятся результаты с накоплением оценок за семестр.

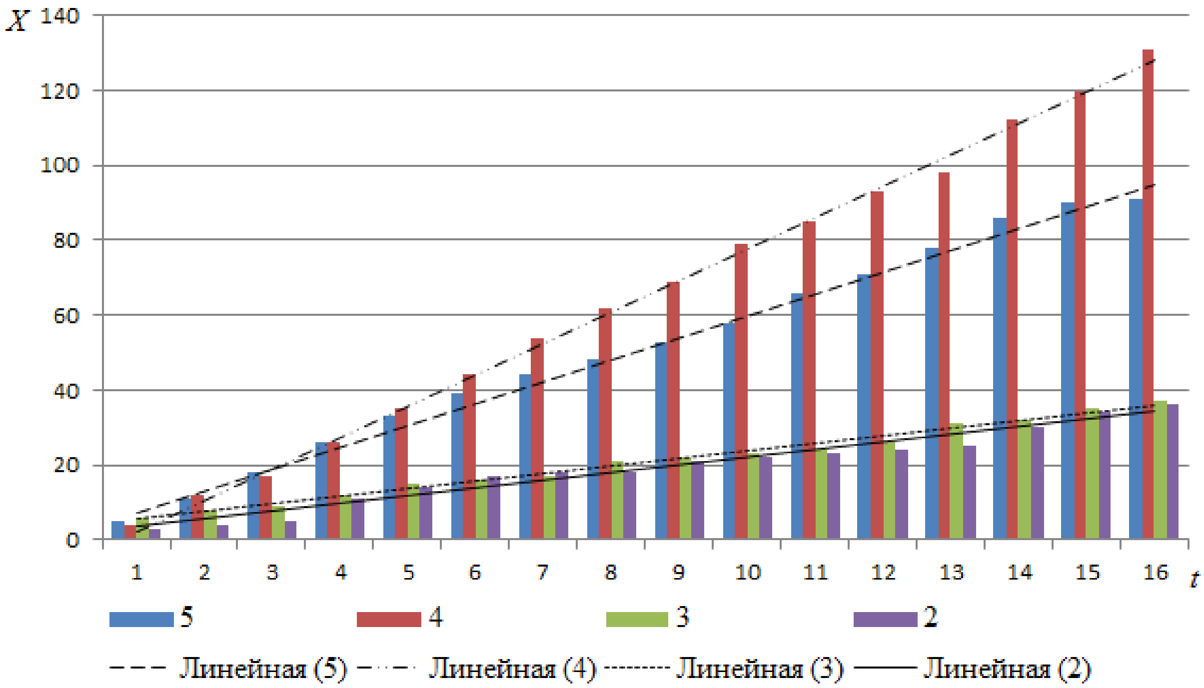

Рис. 1 - Зависимость количества оценок от времени и линии трендов.

Линии трендов на рис. 1 определяются уравнениями линейной регрессии:

$$X_1 = 5{,}8544 \cdot t + 1{,}3 \quad \left(R^2 = 0{,}9952\right); \quad X_2 = 8{,}375 \cdot t - 6{,}125 \quad \left(R^2 = 0{,}9978\right);$$

$$X_3 = 2{,}0235 \cdot t + 3{,}675 \quad \left(R^2 = 0{,}9889\right); \quad X_4 = 2{,}0603 \cdot t + 1{,}55 \quad \left(R^2 = 0{,}9641\right).$$

Коэффициент детерминации $R^2 > 0{,}96$ показывает очень высокую точность аппроксимации, и модель может использоваться для прогнозирования.

Поскольку оценки накапливаются, то функция $X(t)$ является монотонно не убывающей, положительной ступенчатой функцией; $X(t)$ = 0 (в начальный момент времени оценок еще нет). Точки разрыва соответствуют моментам времени получения оценки.

Модель пуассоновского потока может быть обобщена на потоки кратных точек. Пуассоновский поток кратных точек - это математическая модель случайного процесса, где события (кратные точки) возникают независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью. Эта модель описывается законом распределения Пуассона с кратными точками. Кратные точки означают появление нескольких событий за короткий промежуток времен. В отличие от «ординарного» (простейшего) потока, где вероятность появления двух событий почти равна нулю, пуассоновский поток кратных точек допускает кластеры или группы событий. Применение данной теории требует более серьезного математического аппарата [1], чем в данной статье.

Заключение

В статье предложено для моделирования результатов успеваемости учебной группы применять многомерное распределение Пуассона. Приведены формулы расчета характеристик рассматриваемого процесса. Методом имитационного моделирования в MS Excel решен поясняющий пример. Разработанный в статье метод может применяться не только для традиционной пятибалльной шкалы оценивания, но и для других видов шкал.

Список источников

1. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных потоков. - М: Советское радио, 1978. - 248 с.

2. Вентцель Е. С. Овчаров Л.А. Теория вероятностей. - М: Наука, 1969. – 368 с.

3. Ганичев А. В., Ганичева А. В. Моделирование коллективного принятия решений // Научный журнал КубГАУ, 2021. - №174 (10). - С. 64-69.
4. Каменева С. В. Статистическая групповая классификация в случае многомерного распределения Пуассона // Евразийское научное объединение, 2019. - № 1-1 (47). - С. 17-20.
5. Конюховский П. В. Современные модели и методы оценивания качества учебного процесса // Инновации, 2022. - № 5 (283). - С 48-58.
6. Окишев С. В. Траектории успеваемости и их использование при анализе учебного процесса // Мир науки. Педагогика и психология, 2022. - Т. 10. - № 4. - С. 1-28. - URL:https://mir-nauki.com/PDF/19PDMN422.pdf References.

Сведения об авторах

Ганичева Антонина Валериановна, профессор, Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Россия

Ганичев Алексей Валерианович, старший преподаватель, Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Information about the authors

Ganicheva Antonina Valerianovna, Professor, Tver State Agricultural Academy, Tver, Russia

Ganichev Alexey Valerianovich, Senior Lecturer, Tver State Technical University, Tver, Russia